Chapitre 3

Nombres réels et suites de nombres réels

I Quelques précisions et rappels sur les nombres réels

1) Équations dans $\mathbb{R}$

a) Vocabulaire :

▶ "Équation"
On appelle équation toute expression (E) dépendant d'une variable x (ou de plusieurs variables notées par exemple x_1, x_2, ..., x_n...) et contenant un symbole d'égalité. La variable x est appelée "inconnue".

"Résoudre l'équation (E) sur l'ensemble I" signifie trouver **tous** les x possibles appartenant à I tels que (E) est vraie. On dit alors que "x vérifie l'équation (E)" ou encore que "x est solution de (E)"

▶ "Équations équivalentes :"
Soit (E) et (F) deux équations. On dit que (E) et (F) sont équivalentes, et on note $(E) \iff (F)$ si et seulement si (E) et (F) ont les mêmes solutions.

▶ "Ensemble de définition"
De part l'utilisation de fonctions dans les équations, il peut y avoir des problème de définition.

Exemple :
Soit l'équation $(E) : \sqrt{x+2} = x+1$.
Cette équation n'a pas de sens pour tout les x réels, à cause de la racine. On doit avoir $x+2 \geq 0$, et donc l'ensemble de définition de l'équation est $[-2, +\infty[$.

▶ "Ensemble de résolution"
Ce qu'on appelle *l'ensemble de résolution* est l'ensemble sur lequel on résout l'équation. On peut en effet être amené à chercher des solutions sur des ensembles plus restreint que l'ensemble de définition.

Exemple :
On reprend $(E) : \sqrt{x+2} = x+1$.
On sait que $\sqrt{x+2} \geq 0$ pour tout $x \in [-2, +\infty[$, on veut $x+1 = \sqrt{x+2}$
On a donc $x+1 \geq 0$, c'est à dire que les solutions de l'équation sont forcément plus grandes que -1.
On peut donc résoudre l'équation non pas sur $[-2, +\infty[$, mais sur $[-1, +\infty[$, qui sera donc notre intervalle de résolution.

b) Opérations équivalentes :

Proposition 1

Soit (E) une équation à résoudre de la forme $A = B$ (où A et B sont des expressions dépendants éventuellement des inconnues).
Alors on peut :

1. *Ajouter à chaque membre le même terme :*
   Pour n'importe quelle expression C :

$$A = B \iff A + C = B + C$$

2. *Multiplier par un même terme non nul :*
   Si C ne s'annule pas :

$$A = B \iff AC = BC$$

3. *Appliquer une fonction injective :*
   Si f est injective et définie pour A et B, alors

$$A = B \iff f(A) = f(B)$$

Exemple :
Résoudre les équations suivantes :

$$(E) : \ 4x + 3 = 2x - 1$$

$$(F) : \ \frac{x+1}{x-2} = 2$$

$$(G) : \ e^{x^2+2x+1} = 1$$

Danger ! *Le piège de l'élévation au carré*

En général, on n'a pas $A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2$, sauf si on sait que A et B sont de même signe.
En effet, la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$, mais uniquement sur $[0, +\infty[$ ou $]-\infty, 0]$.
Pour résoudre des équations où on a besoin d'élever au carré, on peut :

- Travailler sur des ensembles de résolution où les termes sont tous de même signe.
- Utiliser le fait qu'on a au moins $A = B \Rightarrow A^2 = B^2$ et vérifier ensuite les solutions.

Exemple : $(E) : \sqrt{x+2} = x + 1$

c) Equations du second degré

Théorème 1

Soit a, b et c trois réels avec $a \neq 0$ et soit l'équation $(E) : ax^2 + bx + c = 0$.

Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. Alors,

- *si $\Delta < 0$, (E) n'a pas de solution réelle et $f(x)$ est de signe constant (le signe de a)*
- *$\Delta = 0$, (E) admet une unique solution (dite "racine double") : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.*
  $f(x)$ est alors de signe constant (celui de a) et peut se factoriser sous la forme :

$$f(x) = a(x - x_0)^2$$

- *$\Delta > 0$, (E) admet deux solutions réelles distinctes :*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$f(x)$ est alors du signe de a à l'extérieur des racines, de $-a$ à l'intérieur.
On peut factoriser $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Exemple

$$(E)\ 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

On a $\Delta = 1$, donc deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+1}{4} = 1$.

D'où $(E) \iff x = \dfrac{1}{2}$ ou $x = 1$.

Ici, on pourrait factoriser en écrivant $2x^2 - 3x + 1 = 2(x - \dfrac{1}{2})(x - 1)$.

Remarque :
La propriétés ci dessous fourni un outil très pratique :

Propriété 1 (*Relations coefficients racines*)

Soit $ax^2 + bx + c = 0$ une équation du second degré admettant comme solutions r_1 et r_2 (éventuellement égales), alors

(i) $r_1 r_2 = \dfrac{c}{a}$

(ii) $r_1 + r_2 = \dfrac{-b}{a}$

▷ *Preuve :* on le vérifie facilement par identification :

◁

Exemple d'utilisation
Soit à résoudre $x^2 + 12x - 13 = 0$.

A retenir : toujours essayer des racines évidentes avant de se lancer dans des Δ...

2) Inégalités et inéquations dans $\mathbb{R}$

a) Principe

Les inéquations sont analogues aux équations avec les différences suivantes :

1. le signe $=$ est remplacé par $<$, $\leq$, $>$, $\geq$ ou encore $\neq$
2. les solutions sont plus souvent en nombre infini (par exemple des intervalles)

b) Opérations élémentaires

La propriété ci dessous est énoncée pour le symbole $\geq$. On peut énoncer de la même manière avec $>$, $<$ ou $\leq$.

Propriété 2

Soit (E) une inéquation du type $A \geq B$ où A et B sont deux expressions.
Soit C une expression. On a :

- $A \geq B \iff A + C \geq B + C$
  (on peut ajouter un terme à une inégalité sans rien changer).
- *si* $C > 0$, $A \geq B \iff AC \geq BC$
- *si* $C < 0$, $A \geq B \iff AC \leq BC$ *(le signe est changé en son opposé)*

à retenir : l'addition ne pose aucun problème. En revanche multiplier (ou diviser) peut changer le signe de l'opérateur.

c) Factorisation et tableau de signe

La factorisation est très utile pour une inéquation, car elle permet de mieux étudier les signes. Se ramener à une inéquation qui compare à 0 est souvent un bon plan !

Exemple :

On veut résoudre $\dfrac{x^2 + x - 2}{4x^2 - 49} \geq 0$

d) Composition par une fonction croissante

Proposition 2

Soit une équation du type $A \leq B$ et f une fonction croissante telle que A et B sont inclus dans un ensemble où est définie f.
Alors $A \leq B \Longrightarrow f(A) \leq f(B)$. (implication seulement....)
De plus, si f est strictement croissante, $A \leq B \Longleftrightarrow f(A) \leq f(B)$.

On peut également donner le même résultat avec f décroissante, et on a :

Proposition 3

Soit une équation du type $A \leq B$ et f une fonction décroissante telle que A et B sont inclus dans un intervalle où est définie f.
Alors $A \leq B \Longrightarrow f(A) \geq f(B)$. (implication seulement)
De plus, si f est strictement décroissante, $A \leq B \Longleftrightarrow f(A) \geq f(B)$.

Exemples :

- $e^{x+3} \geq 2 \Longleftrightarrow x + 3 \geq \ln 2$ car la fonction ln est strictement croissante.

- On veut résoudre $\exp(x+2) - \dfrac{1}{\exp(x+2)} \leq \exp(2) - \dfrac{1}{\exp(2)}$.

3) Majoration, minoration, etc.

a) Ensemble majoré, minoré ou borné

L'ensemble des réels est un ensemble dit "ordonné", ce qui permet de définir les notions suivantes :

Définition 1

Soit $A \subset \mathbb{R}$.

(i) "A est majoré" signifie : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, x \leq M$. On dit alors que M est un "majorant".

(ii) "A est minoré" signifie : $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A, m \leq x$. On dit alors que m est un "minorant".

(iii) "A est borné" signifie "A est majoré et minoré".

Exercice :
Donner la définition de :
- A n'est pas majoré :
- A n'est pas minoré :
- A n'est pas borné :

Exemples :
- $A = \{1, 4, 3, 2\}$ est majoré par 4, mais aussi par 10, 23.... Il est minoré par 0, -10, etc. C'est un ensemble borné, dont deux bornes sont -1 et 10... mais elles ne sont pas "optimales"...
- $I =]-\infty, 3[$ est majoré (par 3 par exemple, mais aussi par 10 si on veut...), mais non minoré. Ce n'est pas un ensemble borné.

Pour caractériser un ensemble borné, on peut utiliser la proposition suivante :

Proposition 4

A est borné équivaut à $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A, |x| \leq M$

▷ *Preuve :*

◁

b) Maximum, Minimum

Définition 2

Soit A un ensemble majoré. On dit que A admet un maximum si et seulement si il existe un élément M APPARTENANT à l'ensemble A tel que M est un majorant. On note alors $M = max(A)$.
De même, si A et minoré et qu'il existe $m \in A$ tel que m est un minorant, on dit que m est un minimum et on note $m = min(A)$.

Exemple
Soit $A = \{1, 2, 4, 3\}$. Alors $\min(A) = 1$ et $\max(A) = 4$.

tous les ensembles n'admettent pas forcément un maximum ou un minimum.
Ainsi, l'ensemble $]0, 1[$ n'admet pas de minimum (car 0 n'est pas dans l'ensemble) ni de maximum....

c) Borne supérieure et borne inférieur

Théorème 2 (*Théorème de la borne supérieure*)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide majoré. Alors A admet un plus petit majorant, noté "$\sup A$" et appelé "borne supérieure de A".

On définit de même $\inf(A)$, la borne inférieure de A pour un ensemble A minoré. :

Théorème 3

Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide minoré. Alors A admet un plus grand minorant, noté "$\inf A$" et appelé "borne inférieure de A".

Remarque : la borne inf et la borne sup n'appartiennent pas forcément à l'ensemble. Si c'est le cas, c'est qu'on a affaire à un minimum ou un maximum.

Exemples :

- $\sup([0,1]) = 1$ et $1 \in [0,1]$. Ainsi, 1 est le maximum de $[0,1]$.
- $\sup([0,1[) = 1$ aussi, mais $1 \notin [0,1[$. Il n'est "que" la borne supérieure.

Remarque :
On peut caractériser la borne supérieure en utilisant des quantificateurs :

Proposition 5 (*Quantificateur et borne supérieure*)

Soit $A \subset \mathbb{R}$ tel que $A \neq \emptyset$ et A majoré. Alors on a l'équivalence suivante :

$$M = \sup A \iff \begin{cases} \forall a \in A, a \leq M \\ et \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tel que } M - \varepsilon < a \end{cases}$$

c'est en réalité une traduction :

Et on peut écrire de même une caractérisation de la borne inférieure :

Proposition 6

Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ et A minoré, alors

$$\alpha = \inf(A) \iff \begin{cases} \forall a \in A, \alpha \leq a \ (\alpha \text{ est un minorant}) \\ et \\ \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tel que } a < \alpha + \varepsilon \end{cases}$$

II Suites réelles

1) Définition et vocabulaire

Définition 3

Soit E un ensemble.
On appelle ***suite*** *à valeur dans E toute application u de $\mathbb{N}$ dans E.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n l'image de n par u (au lieu de $u(n)$).

Par extension,pour $k \in \mathbb{N}$, on appelle aussi suite toute application de $[\![k; +\infty[\![$ dans E.

Pour parler de la suite, on pourra dire "la suite u", ou, plus fréquemment, "$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$" qui fait plus apparaître l'aspect "liste" d'éléments. On notera souvent simplement (u_n) sans préciser $n \in \mathbb{N}$ quand il n'y a pas d'ambiguïté.

En pratique : on considérera le plus souvent des suites de nombres réels, c'est à dire que $E = \mathbb{R}$.

Suite stationnaire :
Une suite est dite "stationnaire" si c'est une application constante :

$$\exists C \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = C$$

Suite périodique :
Une suite telle que il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout n, $u_{n+p} = u_n$.

Exemple :
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$ qui est de période

2) Inégalités et suites

a) Suites majorées, minorées

On dira qu'une suite est majorée (respectivement minorée, resp. bornée) si l'ensemble des valeurs prises par la suite est majoré (resp. minoré, resp. borné).

Exemples :
Pour les suites définies par le *terme général* (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = ...$) suivant, dire si elles sont majorées ou minorées ou bornées ou rien de tout ça :

- $u_n = 2^n$ est

- $u_n = \dfrac{1}{n}$

- $u_n = (-1)^n 2^n$

b) Borne supérieure et inférieure d'une suite

Notation

Si (u_n) est une suite, on note $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble des valeurs prises par la suite.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n}$.

Alors $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^*} u_n =$. Montrons le !

c) Suites monotones

Définition 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

- (u_n) *est dite croissante si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- (u_n) *est dite décroissante si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.

On dit que (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.

On définit de la même façon la stricte croissance (resp. scricte décroissance, resp. stricte monotonie) :

(u_n) strictement croissante signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$.

Danger ! *Pièges classiques*

- Le contraire de "suite croissante" n'est pas "suite décroissante" : une suite peut être ni l'un, ni l'autre. Par exemple $u_n = n(-1)^n$ n'est ni croissante, ni décroissante.

- la notion de "monotone" sous entend que cela ne change jamais de "sens" : c'est soit toujours croissant, soit toujours décroissant.

  Contrairement aux fonctions, on n'aura donc jamais de notion comme "(u_n) est croissante sur l'intervalle $[a, b]$"

- Une suite stationnaire est une suite croissante : on a en effet $u_{n+1} = u_n$, donc $u_{n+1} \geq u_n$. C'est donc une suite monotone.

  Et c'est également une suite décroissante...

  En fait, les suites stationnaires sont les seules suites à la fois croissante et décroissante (comme les fonctions constantes qui sont croissantes et décroissantes).

Méthode : *Etude de la monotonie*

Pour montrer qu'une suite est croissante, on peut le faire de plusieurs façons. Les plus habituelles sont les suivantes :

- Methode 1 : calculer $u_{n+1} - u_n$ pour tout n et montrer que le signe est constant (indépendamment de n). Si c'est toujours positif, u_n est croissante, si c'est toujours négatif, u_n est décroissante.
- Méthode 2 : si u_n est une suite strictement positive, calculer u_{n+1}/u_n. Si ce quotient est toujours plus grand que 1, u_n est croissante. Si il est toujours compris entre 0 et 1, u_n est décroissante.

Exemple à retenir :
Soit $q \in \mathbb{R}$ et soit (u_n) définie, pour tout n, par $u_n = q^n$.

III Suites définies par récurrence

1) Généralité

a) Définition :

Grâce au principe de récurrence, on peut définir une suite de la façon suivante :

$$\begin{cases} u_0 & = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = f(u_n, n) \end{cases}$$

où f est une application de $E \times \mathbb{N} \to E$ et $x \in E$.
Autrement dit : une suite définie par récurrence est une suite où on exprime u_{n+1} en fonction de u_n....

Exemple :
Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = n + u_n$.
On a alors $u_1 =$

$u_2 =$

$u_3 =$

Remarque :
On peut définir de la même façon que les récurrences doubles, triple ou forte une suite u_n en donnant u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n (on parle de suite récurrence d'ordre 2), ou u_{n+3} en fonction des trois précédents, etc...

b) Suites arithmétiques

Définition 5

On dit que (u_n) est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ si on peut l'écrire sous la forme

$$\begin{cases} u_0 & \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} & = u_n + r \end{cases}$$

⚠ : r ne doit pas dépendre pas de n...

Proposition 7

Si u_n est une suite arithmétique de raison r, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.

▷ *Preuve* : A vous de faire, très simple par récurrence. ◁

c) suites géométriques

Définition 6

On dit que (u_n) est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ si on peut l'écrire sous la forme

$$\begin{cases} u_0 & \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} & = q \times u_n \end{cases}$$

⚠ : q ne doit pas dépendre pas de n...

Proposition 8

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 q^n$.

▷ *Preuve :* A nouveau très simple par récurrence ◁

Pour les suites géométriques, le résultat suivant est à connaitre impérativement :

Proposition 9

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$. Soit p et n deux entiers avec $p \leq n$. Alors on a la formule suivante :

$$\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}$$

En particulier,

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q} = \frac{q^p - q^{n+1}}{1-q}$$

▷ *Preuve :* Soit par récurrence, soit comme fait en TD... ◁

2) Suites arithmético-géomtrique

a) Définition

Définition 7

On dit que (u_n) est une suite arithmético-géométrique si il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{cases} u_0 & \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} & = a u_n + b \end{cases}$$

Si $a = 1$, on tombe sur une suite arithmétique de raison b.
Si $b = 0$: c'est une suite géométrique de raison a.
Si $a = 0$ la suite est stationnaire à partir du rang 1.

b) Plan d'étude si $a \notin \{0, 1\}$:

On étudie une suite arithmético-géométrique toujours de la même façon :
Soit (u_n) une suite vérifiant la relation de récurrence

$$(1) \qquad u_{n+1} = a u_n + b$$

- *1ère étape* : on cherche une constante c (ne dépendant pas de n donc) telle que

  $$(2) \qquad c = ac + b$$

  (autrement dit, on cherche une version "constante" de la suite).
- *2ème étape* : on effectue l'opération (1) − (2), ce qui donne :

  $$u_{n+1} - c = a u_n + b - ac - b$$

  c'est à dire : $u_{n+1} - c = a(u_n - c)$

  Ainsi, en posant $v_n = u_n - c$, la suite (v_n) est une suite géométrique.
- *3ème étape* : on écrit la suite géométrique obtenue :

  $v_n$est géométrique de raison a, donc $v_n = v_0 a^n$.
- *4ème étape et conclusion* : on se ramène à u_n
  Comme $v_n = u_n - c$, $u_n = v_n + c$ et on a $u_n = v_0 a^n + c = (u_0 - c)a^n + c$

c) Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

3) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

a) Définition :

Définition 8

On appelle suite récurrente linéaire d'ordre 2 toute suite définie par une relation de récurrence double de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

où a et b sont deux nombres réels.

Exemples :

- La suite de Fibonacci, définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 avec $a = 1$ et $b = 1$.
- Une suite de la forme

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + 2u_n - 1 \end{cases}$$

  n'est pas une suite récurrente linaire d'ordre 2 à cause du -1 "en trop".

b) Polynome caractéristique

Définition 9

Soit (u_n) une suite vérifiant une relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. On appelle polynôme caractéristique de la suite le polynôme $P_u(X) = X^2 - aX - b$

Exemple :
la suite de Fibonacci a pour polynôme caractéristique

c) Formule générale

Théorème 4

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$ et soit u_n une suite récurrente linéaire d'ordre 2 vérifiant

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \text{ et } u_0, u_1 \text{ deux réels}$$

Soit $P = X^2 - aX - b$ le polynôme caractéristique de la suite.
On donne la formule dans deux situations :

1. *si P admet deux racines réelles distinctes λ et μ, alors il existe A et B réels tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$$u_n = A\lambda^n + B\mu^n$$
2. *si P admet une racine double λ, alors il existe $A,\ B \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,*
$$u_n = (A + Bn)\lambda^n$$

▷ *Preuve :*

◁

Remarque :
Les valeurs A et B dépendent en fait des valeurs de u_0 et u_1. Pour les déterminer, il suffira de résoudre le système obtenu via les deux premiers termes de la suite.

Exemple :
Reprenons la suite de Fibonacci :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$